Exo 4 :

$n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

$x_n = u_{2n}$, $y_n = u_{2n+1}$

1)

* $x_n = u_{2n} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n)^2}$

$x_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = \underbrace{\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n)^2}}_{x_n} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+1)^2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+2)^2}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+1)^2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+2)^2} = \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+2)^2} > 0$

$\left(\text{car } (2n+2)^2 > (2n+1)^2\right)$

$\Rightarrow (x_n)$ est croissante.

* $y_n = u_{2n+1} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+1)^2}$

$y_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = \underbrace{\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+1)^2}}_{y_n} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+2)^2} + \frac{(-1)^{2n+4}}{(2n+3)^2}$

$y_{n+1} - y_n = -\frac{1}{(2n+2)^2} + \frac{1}{(2n+3)^2} < 0 \quad \left(\text{car } (2n+3)^2 > (2n+2)^2\right)$

$\Rightarrow (y_n)$ est décroissante.

* $y_n - x_n = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n)^2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+1)^2}$

$- \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n)^2}\right)$

$y_n - x_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$

$\lim_{n \to +\infty} y_n - x_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 0$

$\Rightarrow$ (exclusion), (x_n) est $\uparrow$, (y_n) $\downarrow$ et $y_n - x_n \longrightarrow 0$

donc (x_n) et (y_n) sont adjacents.

2) (x_n) et (y_n) sont adjacents donc convergent et on a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = l \in \mathbb{R}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = l$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

donc la suite (u_n) est convergente

3) $E = \{ u_n / n \in \mathbb{N}^* \}$

Inf E = ? Sup E = ?

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_0 \leq x_n \leq y_n \leq y_0$ car $(y_n)\downarrow$

car $x_n \uparrow$ car (x_n) et (y_n) sont adjacents

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : u_2 \leq u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : u_2 \leq u_n \leq u_1$

donc $\min E = u_2 \Rightarrow \text{Inf } E = u_2 = \frac{3}{4}$

$\max E = u_1 \Rightarrow \text{Sup } E = u_1 = 1$

Ex 51

$0 < v_0 < u_0$

$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$

1) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < v_n < u_n$

- $n = 0$, $0 < v_0 < u_0$
- supp que $0 < v_n < u_n$

$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} > 0 \Rightarrow 0 < v_{n+1}$

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$

$$= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)}$$

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

2) (x_n) et (y_n) sont adjacents donc convergent et on a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = l \in \mathbb{R}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = l$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

donc la suite (u_n) est convergente

3) $E = \{ u_n / n \in \mathbb{N}^* \}$

Inf E = ? Sup E = ?

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_0 \leq x_n \leq y_n \leq y_0$ car $(y_n)\downarrow$

car $x_n \uparrow$ car (x_n) et (y_n) sont adjacents

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : u_2 \leq u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : u_2 \leq u_n \leq u_1$

donc $\min E = u_2 \Rightarrow \text{Inf } E = u_2 = \frac{3}{4}$

$\max E = u_1 \Rightarrow \text{Sup } E = u_1 = 1$

Ex 51

$0 < v_0 < u_0$

$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$

1) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < v_n < u_n$

- $n = 0$, $0 < v_0 < u_0$
- supp que $0 < v_n < u_n$

$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} > 0 \Rightarrow 0 < v_{n+1}$

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$

$$= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)}$$

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

2) * $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2} < 0$

donc (u_n) est décroissante

* $v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - v_n = \frac{2u_n v_n - u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n}$

$= \frac{u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{v_n(u_n - v_n)}{u_n + v_n} > 0$

donc (v_n) est croissante.

* $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_0 \leq v_n < u_n \leq u_n$

car $(u_n) \uparrow$ Q1 car $u_n \downarrow$

- (v_n) est $\uparrow$, majoré par u_0, donc converge, soit $l_1 = \lim_{n \to +\infty} v_n$
- (u_n) est $\downarrow$, minoré par v_0, donc converge, soit $l_2 = \lim_{n \to +\infty} u_n$
- On a $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

En passant à la limite on obtient

$l_2 = \frac{l_2 + l_1}{2} \Rightarrow 2l_2 = l_2 + l_1 \Rightarrow l_2 = l_1$

D'où $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = l_2 - l_1 = 0$

On a (v_n) est $\uparrow$, (u_n) est $\downarrow$, $u_n - v_n \to 0$

donc (u_n) et (v_n) sont adjacents.

on pose $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = l$

$l = ?$

On a $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$

$u_{n+1} v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \cdot \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = u_n v_n$

$\Rightarrow u_{n+1} v_{n+1} = u_n v_n$, $\forall n$

$\Rightarrow u_n v_n$ est une suite croissante.

$\Rightarrow u_n v_n = u_0 v_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2) * $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2} < 0$

donc (u_n) est décroissante

* $v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - v_n = \frac{2u_n v_n - u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n}$

$= \frac{u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{v_n(u_n - v_n)}{u_n + v_n} > 0$

donc (v_n) est croissante.

* $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_0 \leq v_n < u_n \leq u_n$

car $(u_n) \uparrow$ Q1 car $u_n \downarrow$

- (v_n) est $\uparrow$, majoré par u_0, donc converge, soit $l_1 = \lim_{n \to +\infty} v_n$
- (u_n) est $\downarrow$, minoré par v_0, donc converge, soit $l_2 = \lim_{n \to +\infty} u_n$
- On a $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

En passant à la limite on obtient

$l_2 = \frac{l_2 + l_1}{2} \Rightarrow 2l_2 = l_2 + l_1 \Rightarrow l_2 = l_1$

D'où $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = l_2 - l_1 = 0$

On a (v_n) est $\uparrow$, (u_n) est $\downarrow$, $u_n - v_n \to 0$

donc (u_n) et (v_n) sont adjacents.

on pose $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = l$

$l = ?$

On a $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$

$u_{n+1} v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \cdot \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = u_n v_n$

$\Rightarrow u_{n+1} v_{n+1} = u_n v_n$, $\forall n$

$\Rightarrow u_n v_n$ est une suite croissante.

$\Rightarrow u_n v_n = u_0 v_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

En passant à la limite on obtient

$\ell^2 = u_0 v_0 \Rightarrow \ell = \sqrt{u_0 v_0}$ ou $\ell = -\sqrt{u_0 v_0}$

on a : $\ell = \sqrt{u_0 v_0}$ (car $u_n \geq 0 \Rightarrow \ell \geq 0$)

Ex 61

$u_0 = 4$, $u_{n+1} = \dfrac{5 + 4u_n}{3 + u_n}$

On pose $f(x) = \dfrac{5 + 4x}{3 + x}$

On a $u_{n+1} = f(u_n)$

$$f'(x) = \frac{4(3+x) - (5+4x)}{(3+x)^2} = \frac{7}{(3+x)^2} > 0$$

f est croissante, il suffit de comparer les 2 premiers termes.

$u_0 = 4$, $u_1 = f(u_0) = f(4) = \dfrac{5+16}{3+4} = \dfrac{21}{7} = 3$

$u_0 = 4 > u_1 = 3$

donc (u_n) est décroissante

est-ce qu'il existe un minorant ?

→ 1er méthode :

On remarque que (u_n) est minoré par 0

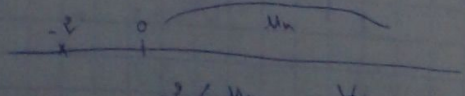
On a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 0$

. $n = 0$ $u_0 = 4$

. supposons que $u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} = \dfrac{5 + 4u_n}{3 + u_n} \geq 0$

donc $\forall n$, $u_n \geq 0$

(u_n est décroissante, minoré donc converge



$-2 < u_n$ $\forall n$

Soit $\ell = \lim_{n \to \infty} u_n$

puisque f est continue alors on a $\ell = f(\ell)$

$P_{n+1} = 2P_n - 2$

En passant à la limite on obtient

$\ell^2 = u_0 v_0 \Rightarrow \ell = \sqrt{u_0 v_0}$ ou $\ell = -\sqrt{u_0 v_0}$

on a : $\ell = \sqrt{u_0 v_0}$ (car $u_n \geq 0 \Rightarrow \ell \geq 0$)

Ex 61

$u_0 = 4$, $u_{n+1} = \dfrac{5 + 4u_n}{3 + u_n}$

On pose $f(x) = \dfrac{5 + 4x}{3 + x}$

On a $u_{n+1} = f(u_n)$

$$f'(x) = \frac{4(3+x) - (5+4x)}{(3+x)^2} = \frac{7}{(3+x)^2} > 0$$

f est croissante, il suffit de comparer les 2 premiers termes.

$u_0 = 4$, $u_1 = f(u_0) = f(4) = \dfrac{5+16}{3+4} = \dfrac{21}{7} = 3$

$u_0 = 4 > u_1 = 3$

donc (u_n) est décroissante

est-ce qu'il existe un minorant ?

→ 1er méthode :

On remarque que (u_n) est minoré par 0

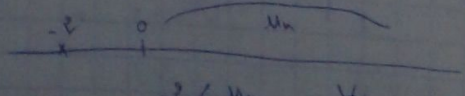
On a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 0$

. $n = 0$ $u_0 = 4$

. supposons que $u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} = \dfrac{5 + 4u_n}{3 + u_n} \geq 0$

donc $\forall n$, $u_n \geq 0$

(u_n est décroissante, minoré donc converge



$-2 < u_n$ $\forall n$

Soit $\ell = \lim_{n \to \infty} u_n$

puisque f est continue alors on a $\ell = f(\ell)$

$P_{n+1} = 2P_n - 2$

$\rightarrow \quad x = f(x) \iff x = \dfrac{5+4x}{5+x}$

$\iff x(5+x) = 5+4x$

$\iff 5x + x^2 = 5 + 4x$

$\iff x^2 - x - 5 = 0$

$\Delta = 1 - 4(1)(-5) = 21 > 0$

$x = f(x) \iff x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$ ou $x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$

$l = f(l) \rightarrow l = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$ ou $l = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$

or $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geq 0$ donc $l \geq 0$

donc $l = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ $\left(\text{car } \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} < 0 \right)$

Conclusion: La suite (u_n) est convergente et sa limite est $\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$

* $v_0 = 0$, $v_{n+1} = \dfrac{3}{1+v_n^2}$

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$

$v_{2n} \leq \dfrac{1}{2}$ et $v_{2n+1} \geq 2$

2) On déduire la nature de (v_n)

On pose $f(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$

$f'(x) = 3\left(\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}\right) = \dfrac{-6x}{(1+x^2)^2}$

On a $v_0 \geq 0$, $v_n = \dfrac{3}{1+v_{n-1}^2} \geq 0$

$\forall n \in \mathbb{N} : \ v_n \geq 0$

On va considérer f sur $[0, +\infty[$

$\forall x \in [0, +\infty[: \ f'(x) \leq 0$ donc

f est décroissante sur $[0, +\infty[$

On pose $x_n = v_{2n}$ et $y_n = v_{2n+1}$

$x_0 = v_0 = 0$, $x_1 = v_2 \geq 0$ $\Rightarrow$ $x_1 \geq x_0$

$\Rightarrow$ (x_n) est croissante et (y_n) décroissante

$\rightarrow$ On va montrer $\forall n \in \mathbb{N}$

$$v_{2n} < \frac{1}{2}$$

$n = 0$: $v_0 = 0 \leq \frac{1}{2}$

Supposons que $v_{2n} \leq \frac{1}{2}$

On va montrer que $v_{2n+2} \leq \frac{1}{2}$

$v_{2n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(v_{2n}) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $v_{n+1} \geq \frac{12}{5}$

$\Rightarrow$ $f(v_{2n+1}) \leq f\left(\frac{12}{5}\right)$

$\Rightarrow$ $v_{2n+2} \leq \frac{75}{169} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $v_{2n+2} \leq \frac{1}{2}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{2n} \leq \frac{1}{2}$

de la même manière on montre que $v_{2n+1} \geq 2$

$\Rightarrow$ (v_{2n}) est croissante, majoré par $\frac{1}{2}$

donc converge, soit $l_1 = \lim_{n \to +\infty} v_{2n}$

$$l_1 \leq \frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ v_{2n+1} est décroissante minoré par 2

donc converge, soit $l_2 = \lim_{n \to +\infty} v_{2n+1}$

$$l_2 \geq 2$$

On a : $l_1 \leq \frac{1}{2} < 2 < l_2$

$\Rightarrow$ $l_1 \neq l_2$ donc (v_n) diverge.

On pose $x_n = v_{2n}$ et $y_n = v_{2n+1}$

$x_0 = v_0 = 0$, $x_1 = v_2 \geq 0$ $\Rightarrow$ $x_1 \geq x_0$

$\Rightarrow$ (x_n) est croissante et (y_n) décroissante

$\rightarrow$ On va montrer $\forall n \in \mathbb{N}$

$$v_{2n} < \frac{1}{2}$$

$n = 0$: $v_0 = 0 \leq \frac{1}{2}$

Supposons que $v_{2n} \leq \frac{1}{2}$

On va montrer que $v_{2n+2} \leq \frac{1}{2}$

$v_{2n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(v_{2n}) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $v_{n+1} \geq \frac{12}{5}$

$\Rightarrow$ $f(v_{2n+1}) \leq f\left(\frac{12}{5}\right)$

$\Rightarrow$ $v_{2n+2} \leq \frac{75}{169} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $v_{2n+2} \leq \frac{1}{2}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{2n} \leq \frac{1}{2}$

de la même manière on montre que $v_{2n+1} \geq 2$

$\Rightarrow$ (v_{2n}) est croissante, majoré par $\frac{1}{2}$

donc converge, soit $l_1 = \lim_{n \to +\infty} v_{2n}$

$$l_1 \leq \frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ v_{2n+1} est décroissante minoré par 2

donc converge, soit $l_2 = \lim_{n \to +\infty} v_{2n+1}$

$$l_2 \geq 2$$

On a : $l_1 \leq \frac{1}{2} < 2 < l_2$

$\Rightarrow$ $l_1 \neq l_2$ donc (v_n) diverge.

Serie N° 5

Exo 1 :

$\forall x \in [-1,1]$: $\cos(\arccos(x)) = x$

$\forall x \in [0,\pi]$: $\arccos(\cos(x)) = x$

On retranche 2π, 4π, 6π

1-

1) $\arccos\left(\cos\left(\frac{27\pi}{7}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{27}{7}\pi - 4\pi\right)\right)$

$= \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$

$\left(\text{car } \frac{\pi}{7} \in [0,\pi]\right)$ $= \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$

$\arccos\left(\cos\left(\frac{27\pi}{7}\right)\right) = \frac{\pi}{7}$

2) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{31}{4}\pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left[8\pi - \frac{31}{4}\pi\right]\right)$

$= \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\left(\text{car } \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

$\arcsin\left(\sin\left(-\frac{31}{4}\pi\right)\right) = \frac{\pi}{4}$

3) $\arctan\left(\tan\left(\frac{19}{6}\pi\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{19}{6}\pi - 3\pi\right)\right)$

$= \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ $\left(\text{car } \frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

$\arctan\left(\tan\left(\frac{19\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$

2- $f(x) = \arccos\left(\sqrt{x^2-2}\right)$

$x \in D_f \iff x^2 - 2 \geq 0$ et $-1 \leq \sqrt{x^2-2} \leq 1$

$\iff x^2 \geq 2$ et $\sqrt{x^2-2} \leq 1$

$\iff x^2 \geq 2$ et $x^2 - 2 \leq 1$

$\iff x^2 \geq 2$ et $x^2 \leq 3$

$\iff |x| \geq \sqrt{2}$ et $|x| \leq \sqrt{3}$

$\iff \sqrt{2} \leq |x| \leq \sqrt{3}$

$\iff \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3} \leq x \leq -\sqrt{2}$

$D_f = [-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

Serie N° 5

Exo 1 :

$\forall x \in [-1,1]$: $\cos(\arccos(x)) = x$

$\forall x \in [0,\pi]$: $\arccos(\cos(x)) = x$

On retranche 2π, 4π, 6π

1-

1) $\arccos\left(\cos\left(\frac{27\pi}{7}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{27}{7}\pi - 4\pi\right)\right)$

$= \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$

$\left(\text{car } \frac{\pi}{7} \in [0,\pi]\right)$ $= \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$

$\arccos\left(\cos\left(\frac{27\pi}{7}\right)\right) = \frac{\pi}{7}$

2) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{31}{4}\pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left[8\pi - \frac{31}{4}\pi\right]\right)$

$= \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\left(\text{car } \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

$\arcsin\left(\sin\left(-\frac{31}{4}\pi\right)\right) = \frac{\pi}{4}$

3) $\arctan\left(\tan\left(\frac{19}{6}\pi\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{19}{6}\pi - 3\pi\right)\right)$

$= \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ $\left(\text{car } \frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

$\arctan\left(\tan\left(\frac{19\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$

2- $f(x) = \arccos\left(\sqrt{x^2-2}\right)$

$x \in D_f \iff x^2 - 2 \geq 0$ et $-1 \leq \sqrt{x^2-2} \leq 1$

$\iff x^2 \geq 2$ et $\sqrt{x^2-2} \leq 1$

$\iff x^2 \geq 2$ et $x^2 - 2 \leq 1$

$\iff x^2 \geq 2$ et $x^2 \leq 3$

$\iff |x| \geq \sqrt{2}$ et $|x| \leq \sqrt{3}$

$\iff \sqrt{2} \leq |x| \leq \sqrt{3}$

$\iff \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3} \leq x \leq -\sqrt{2}$

$D_f = [-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

$\rightarrow \quad x \in D_{f'} \iff x^2 - 2 > 0$ et $-1 < \sqrt{x^2-2} < 1$

$\iff \sqrt{2} < |x| < \sqrt{3}$

$D_{f'} =]-\sqrt{3}, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, \sqrt{3}[$

donc de arc... et de $(\sqrt{2})$

Ex 2 :

1) Mq $\forall x \in [1, +\infty[\; : \; \arg ch(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}} \right)$

On pose $y = \arg ch(x)$ donc $x = ch(y)$ avec $y \geq 0$

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{ch y + \sqrt{ch^2 y - 1}}{ch y - \sqrt{ch^2 y - 1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{ch y + \sqrt{sh^2 y}}{ch y - \sqrt{sh^2 y}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{ch y + sh y}{ch y - sh y} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^y}{e^{-y}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(e^{2y} \right)$$

$$= \frac{1}{2} 2y$$

$$= y$$

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}} \right) = \arg ch(x)$$

2) Mq $\forall x \in [-1, 1] \; : \; \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

On pose $y = \arccos(x)$

$\Rightarrow \quad x = \cos y$ avec $y \in [0, \pi)$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{\sin^2 y} = |\sin y| \underset{y \in [0,\pi]}{=} \sin y = \sin(\arccos(x))$$

3) $\forall x \in [0, \pi] \; : \; 2 \arccos \left(\sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}} \right) = x$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \left| \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right| = \cos \frac{x}{2}$$

car $\frac{x}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$2\arccos\left(\frac{1+\cos(x)}{2}\right) = 2\arccos\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\left(\text{car } \frac{x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset [0, \pi]\right) = 2\,\frac{x}{2}$$

$$= x$$

Exo 3 :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \arccos\left(2x^2 - 1\right)$$

1) Mq $]0, 1] \subset D_f$

$$x \in D_f \iff \left(1 - x^2 \geqslant 0 \text{ et } x \neq 0\right) \text{ et } -1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1$$

$$\iff x^2 \leqslant 1,\ x \neq 0 \text{ et } 0 \leqslant 2x^2 \leqslant 2$$

$$\iff |x| \leqslant 1,\ x \neq 0 \text{ et } 0 \leqslant x^2 \leqslant 1$$

$$\iff |x| \leqslant 1 \text{ et } x \neq 0$$

$$D_f = [-1, 1] - \{0\}$$

$$= [-1, 0[\cup]0, 1]$$

donc $]0, 1] \subset D_f$

2) $\forall x \in]0, 1[$: $f'(x) = ?$

$$\left(f(u(x))\right)' = u'(x) \cdot f'(u(x))$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)' \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2} - \left(2x^2 - 1\right)' \left(\frac{1}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}}\right)$$

Exercice 3: $f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \arccos(2x^2 - 1)$

1) Mq $]0, 1] \subset D_f$

$x \in D_f \iff (x \neq 0 \text{ et } 1 - x^2 \geqslant 0)$ et $-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1$

$\iff x \neq 0$ et $x^2 \leqslant 1$ et $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$

$\iff |x| \leqslant 1$ et $x \neq 0$

$D_f = [-1, 1] - \{0\} = [-1, 0[\cup]0, 1]$ donc $]0, 1] \subset D_f$

$$2\arccos\left(\frac{1+\cos(x)}{2}\right) = 2\arccos\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\left(\text{car } \frac{x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset [0, \pi]\right) = 2\,\frac{x}{2}$$

$$= x$$

Exo 3 :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \arccos\left(2x^2 - 1\right)$$

1) Mq $]0, 1] \subset D_f$

$$x \in D_f \iff \left(1 - x^2 \geqslant 0 \text{ et } x \neq 0\right) \text{ et } -1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1$$

$$\iff x^2 \leqslant 1,\ x \neq 0 \text{ et } 0 \leqslant 2x^2 \leqslant 2$$

$$\iff |x| \leqslant 1,\ x \neq 0 \text{ et } 0 \leqslant x^2 \leqslant 1$$

$$\iff |x| \leqslant 1 \text{ et } x \neq 0$$

$$D_f = [-1, 1] - \{0\}$$

$$= [-1, 0[\cup]0, 1]$$

donc $]0, 1] \subset D_f$

2) $\forall x \in]0, 1[$: $f'(x) = ?$

$$\left(f(u(x))\right)' = u'(x) \cdot f'(u(x))$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)' \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2} - \left(2x^2 - 1\right)' \left(\frac{1}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}}\right)$$

Exercice 3: $f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \arccos(2x^2 - 1)$

1) Mq $]0, 1] \subset D_f$

$x \in D_f \iff (x \neq 0 \text{ et } 1 - x^2 \geqslant 0)$ et $-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1$

$\iff x \neq 0$ et $x^2 \leqslant 1$ et $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$

$\iff |x| \leqslant 1$ et $x \neq 0$

$D_f = [-1, 1] - \{0\} = [-1, 0[\cup]0, 1]$ donc $]0, 1] \subset D_f$

$$(g(f(x)))' = f'(x)\, g'(f(x))$$

2) $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)'}{1+\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2} + \dfrac{(2x^2-1)'}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}}$

$$= \frac{\frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}}{1+\frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}}$$

$$= \frac{\frac{-x^2-1+x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}}{\frac{x^2+1-x^2}{x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2)^2+2\times 2x^2-1}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{4x^2+4x^2}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

donc $f(x) = -\arccos x + k$

$\forall x \in]0,1[$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (-\arccos x + k)$

$\Rightarrow f(1) = -\arccos 1 + k$

$\arctan 0 - \arccos 1 = -\arccos 1 + k$

$\Rightarrow k = 0$ donc $f(x) = -\arccos x \quad \forall x \in]0,1]$

(On a aussi $f(x) = \arcsin x + C$

en obtient $0 - \arccos 1 = \arcsin 1 + C$

$0 \qquad\qquad \frac{\pi}{2}$

donc $C = -\frac{\pi}{2}$

donc $f(x) = \arcsin x - \frac{\pi}{2}$

$$(g(f(x)))' = f'(x)\, g'(f(x))$$

2) $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)'}{1+\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2} + \dfrac{(2x^2-1)'}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}}$

$$= \frac{\frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}}{1+\frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}}$$

$$= \frac{\frac{-x^2-1+x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}}{\frac{x^2+1-x^2}{x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2)^2+2\times 2x^2-1}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{4x^2+4x^2}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

donc $f(x) = -\arccos x + k$

$\forall x \in]0,1[$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (-\arccos x + k)$

$\Rightarrow f(1) = -\arccos 1 + k$

$\arctan 0 - \arccos 1 = -\arccos 1 + k$

$\Rightarrow k = 0$ donc $f(x) = -\arccos x \quad \forall x \in]0,1]$

(On a aussi $f(x) = \arcsin x + C$

en obtient $0 - \arccos 1 = \arcsin 1 + C$

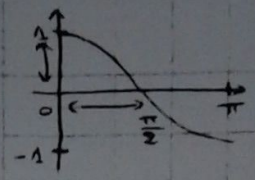
$0 \qquad\qquad \frac{\pi}{2}$

donc $C = -\frac{\pi}{2}$

donc $f(x) = \arcsin x - \frac{\pi}{2}$

3) On pose $t = \arccos x$ avec $x \in]0,1]$

donc $x = \cos t$ avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$



$f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \arccos(2x^2-1)$

$= \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}\right) - \arccos(2\cos^2 t - 1)$

$= \arctan\left(\frac{|\sin t|}{\cos t}\right) - \arccos(\cos 2t)$

$= \arctan\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) - \arccos(\cos 2t)$

$= \arctan(\tan t) - \arccos(\cos 2t)$

$= t - 2t = -t = -\arccos x$

car $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $2t \in [0, \pi[$

Exercice 4

$f(x) = x - \cos x$

1) On a $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$

$x \mapsto \cos x$ est " " " "

donc f est continue sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$

et on a $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

D'après le th de Cauchy $\exists x_0 \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ $f(x_0) = 0$

2) On a f est continue sur $[x_0, \frac{\pi}{4}]$ et dérivable sur $]x_0, \frac{\pi}{4}[$

D'après TAF :

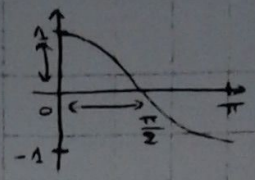
$\exists c \in]x_0, \frac{\pi}{4}[$: $f(\frac{\pi}{4}) - f(x_0) = f'(c)(\frac{\pi}{4} - x_0)$

$\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = f'(c)(\frac{\pi}{4} - x_0)$

$f'(c) = \frac{\frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4}}{\frac{\pi - 4x_0}{4}} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{\pi - 4x_0}$.

3) On pose $t = \arccos x$ avec $x \in]0,1]$

donc $x = \cos t$ avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$



$f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \arccos(2x^2-1)$

$= \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}\right) - \arccos(2\cos^2 t - 1)$

$= \arctan\left(\frac{|\sin t|}{\cos t}\right) - \arccos(\cos 2t)$

$= \arctan\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) - \arccos(\cos 2t)$

$= \arctan(\tan t) - \arccos(\cos 2t)$

$= t - 2t = -t = -\arccos x$

car $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $2t \in [0, \pi[$

Exercice 4

$f(x) = x - \cos x$

1) On a $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$

$x \mapsto \cos x$ est " " " "

donc f est continue sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$

et on a $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

D'après le th de Cauchy $\exists x_0 \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ $f(x_0) = 0$

2) On a f est continue sur $[x_0, \frac{\pi}{4}]$ et dérivable sur $]x_0, \frac{\pi}{4}[$

D'après TAF :

$\exists c \in]x_0, \frac{\pi}{4}[$: $f(\frac{\pi}{4}) - f(x_0) = f'(c)(\frac{\pi}{4} - x_0)$

$\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = f'(c)(\frac{\pi}{4} - x_0)$

$f'(c) = \frac{\frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4}}{\frac{\pi - 4x_0}{4}} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{\pi - 4x_0}$.

exercice 3 :

1) $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = ?$

soit $\ln(x) = f(x)$

pour $x \geq 1$, f est continue sur $[n, n+1]$, dérivable sur $]n, n+1[$

donc par le T.A.F $\exists c \in]n, n+1[$ tel que

$f(n+1) - f(n) = f'(c)(n+1-n)$

donc $f(n+1) - f(n) = f'(c)$

$\ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{c}$

$n < c < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$

donc $\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$

$n = 1 \quad \frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < 1$

$n = 2 \quad \frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$

$\vdots$

$n \quad \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$

$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

Or $\lim_{+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = +\infty$

3) $\forall x > 0 \quad \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$

$f(x) = \arctan x$

$\forall x > 0$: f est continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$

par le T.A.F. $\exists c \in]0, x[\quad f(x) - f(0) = x f'(c)$

$\arctan x - \arctan 0 = x \frac{1}{1+c^2}$

donc $\arctan x = \frac{x}{1+c^2}$